

Table des matières

1. Priorités opératoires.	3
2. Entiers.	5
3. Calculer avec des fractions.	7
I Produits ou quotients de fractions.	7
1 Les règles générales.	7
2 Simplifier avant les calculs.	7
II Sommes ou différences de fractions.	7
1 La règle général.	7
2 Simplifier avant les calculs.	7
3 Exercices.	7
4. Puissances.	9
I Formules.	9
II Exercices.	10
5. Formules algébriques.	11
6. Développer et factoriser.	13
I Écriture réduite et ordonnée.	13
II Les règles de développement du collège.	13
1 Distributivité simple.	13
2 Double distributivité.	14
3 Identités remarquables.	14
4 Facteur commun.	14
5 Factoriser avec les identités remarquables.	14
6 Factoriser par regroupements de termes.	15
III Exercices.	15
7. Équations.	17
I Équations du premier de degré.	17
II Équations $x^2 = a$	17
III Exercices.	17
8. Fonctions.	19

L'objectif est de travailler des compétences qui doivent être maîtrisées avant d'aller au lycée. Les exercices doivent être faits sans calculatrice ou autre moyen de calcul.

1. Priorités opératoires.

La maîtrise de ces priorités est nécessaire en classe de seconde pour les problèmes de factorisation, de développement et donc l'étude du signe des fonctions ou la résolution des équations. La question n'est pas uniquement de savoir faire le calcul numérique mais de comprendre les règles.

Les priorités opératoires dans l'ordre décroissant sont :

- Les parenthèses, ou les crochets en commençant par celles qui sont le plus intérieur.
- Les numérateurs et dénominateurs d'expressions fractionnaires.
- Les puissances.
- Les produits et les divisions en lignes ($\times$ et $\div$).
- Les additions et les soustractions.

Exemples.

1) $3 - [1 + 2(3 + 1)] = 3 - [1 + 2 \times 4] = 3 - [1 + 8] = 3 - 9 = -6.$

2) $\frac{1 - 3 \times 5}{11 + 3} = \frac{1 - 15}{14} = \frac{-14}{14} = 1.$

3) $3 \times 2^2 + 9 \div 3 = 2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11.$

Exercice 1. Calculez en respectant chaque étape rendue nécessaire par une règle de priorité opératoire comme dans l'exemple précédent.

Exercice 2. Les calculs suivants sont soit des produits, soit des quotient, soit des sommes (ou des différences). Dites dans chaque cas ce qu'il en est.

Exercice 3. QCM de calcul.

Exercice 4. Déterminez le signe de

a) $(\pi - 3)(\pi - 7).$

b) $(-1)^{101}(-2 + 3).$

c) $\sqrt{156} - 12,5.$

Indication : pour le c) vous pouvez commencer par calculer $(\sqrt{156} - 12,5)(\sqrt{156} + 12,5).$

2. Entiers.

Tout nombre entier peut s'écrire comme un produit de nombres premiers. Les nombres premiers étant les entiers admettant exactement deux diviseurs positifs. Les petits nombres premiers à connaître : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Exemples.

- 1) Décomposition en facteurs premiers de 24 : $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$.
- 2) Déterminons le pgcd et le ppcm de 42 et 36. $42 = 2 \times 3 \times 7$ et $36 = 2^2 \times 3^2$ donc le pgcd est $2 \times 3 = 6$ et le ppcm $2^2 \times 3^2 \times 7$.
- 3) Déterminons la forme irréductible d'une fraction : $\frac{36}{42} = \frac{2^2 \times 3^2}{2 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}$.

Il existe différentes écritures de nombres mais elles ne sont pas forcément possibles pour tous les nombres. L'écriture décimale ou fractionnaire de π ou de $\sqrt{2}$ n'est pas possible c'est pourquoi ils ont une autre forme d'écriture. Les écritures que vous devez connaître : décimale, fractionnaire, sous la forme $a\sqrt{b}$ ou encore l'écriture scientifique.

Exercice 5. Remplacez ♠ par des chiffres afin que les nombres obtenus vérifient la condition donnée. Écrire toutes les solutions possibles.

- 1) $5\spadesuit 8\spadesuit 2$ est divisible par 9.
- 2) $3\spadesuit 5\spadesuit$ est divisible par 9 et par 2.
- 3) $34\spadesuit 45\spadesuit$ est divisible par 9 et par 5.
- 4) $5\spadesuit 8\spadesuit 2$ est divisible par 9.
- 5) $1\spadesuit 3\spadesuit$ est divisible par 15.
- 6) $\spadesuit 2345\spadesuit$ est divisible par 11 et par 3.

Exercice 6. On considère les nombres 4 116 et 2 156.

- 1) Donnez leur décomposition en facteurs premiers.
- 2) Déterminez leur pgcd et leur ppcm.
- 3) Lequel de ces deux nombres a le plus de diviseurs ?

Exercice 7. En utilisant la décomposition en facteurs premiers, simplifiez au maximum les fractions.

$$A = \frac{71\,610}{20\,790}$$

$$B = \frac{374\,850}{350\,350}$$

$$C = \frac{2\,635}{1\,274}$$

$$D = \frac{4\,923\,765}{980\,980}$$

Exercice 8. Décomposez 111 111 en produit de facteurs premiers.

Exercice 9. Par combien de zéros se terminent les nombres suivants ?

$$A = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 9 \times 10,$$

$$B = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 99 \times 100,$$

$$C = 100 \times 101 \times 102 \times 103 \times \cdots \times 998 \times 999.$$

3. Calculer avec des fractions.

I Produits ou quotients de fractions.

1 Les règles générales.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \text{ et } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Exemples.

$$1) \quad \frac{3}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{7 \times 6}.$$

$$2) \quad \frac{4}{2+x} \times \frac{x}{5} = \frac{4x}{(2+x) \times 5}.$$

2 Simplifier avant les calculs.

Lorsqu'il y a un produit au numérateur et un produit au dénominateur et que ces deux produits ont un facteur commun on peut simplifier par ce facteur commun : $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$.

Exemples.

1) On n'effectue pas les multiplications des numérateurs et dénominateurs on simplifie directement les facteurs communs : $\frac{6}{5} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{5}$.

$$2) \quad \frac{12}{5} \times 76 = \frac{2 \times 7}{5} = \frac{14}{5}.$$

Exercice 10. Dans un lycée : 32 % des élèves de Seconde étudient le latin. 75 % de ceux qui étudient le latin ont commencé au collège. Il y a 225 élèves en seconde. Combien d'élèves ont commencé le latin en seconde dans ce lycée ?

Indication : Pour calculer a % d'une valeur, on multiplie cette valeur par $\frac{a}{100}$.

Exercice 11. Écrivez les nombres suivants sous la forme $3^n \times 5^m \times 7^p$ avec n, m et p des entiers relatifs.

II Sommes ou différences de fractions.

1 La règle général.

2 Simplifier avant les calculs.

3 Exercices.

Exercice 12. Calculez puis donnez les résultats sous forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4},$$

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) \times \frac{3}{4},$$

$$C = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) \div \frac{3}{4},$$

$$D = \frac{4}{7} - \frac{1}{7} \times \frac{5}{3},$$

$$E = \frac{3}{7} - \frac{2}{5} \times \frac{15}{4},$$

$$F = \frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{9}{4} + 1}.$$

Exercice 13. Calculez puis donnez les résultats sous forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{-8}{25} \div \frac{56}{-5},$$

$$B = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{7}},$$

$$C = \frac{3}{4} \div \frac{7}{8},$$

$$D = \frac{\frac{-4}{25}}{\frac{16}{35}},$$

$$E = \frac{\frac{3}{7} - \frac{2}{3}}{\frac{4}{3} - \frac{5}{7}},$$

$$F = \frac{\frac{2}{4} + \frac{5}{7}}{\frac{4}{7} - \frac{5}{7}}.$$

Exercice 14. Calculez puis donnez les résultats sous forme d'une fraction irréductible.

$$A = \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{4}\right) \times \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{2}\right),$$

$$B = \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{5}\right) \div \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right),$$

$$C = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \left(3 + \frac{1}{2}\right),$$

$$D = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right),$$

$$E = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \div \left(1 + \frac{1}{3}\right).$$

Exercice 15. Calculez les expressions suivantes lorsque $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{3}{2}$ et $c = -\frac{3}{4}$.

$$A = 3a - b - c,$$

$$B = -2a + 4b - 5c,$$

$$C = 6b^2 - 3a + 5,$$

$$D = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

$$E = \frac{a + c}{a - b}.$$

Exercice 16. Calculez la valeur de $F = \frac{x + 5y}{x}$ lorsque

$$x = \frac{2}{3} \text{ et } y = -4,$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{7}{10},$$

$$x = -4 \text{ et } y = -\frac{8}{5},$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ et } y = \frac{2}{15}.$$

Exercice 17. Calculer puis donner sous forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{7}}{\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}},$$

$$B = \frac{5 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{5 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}},$$

$$C = \frac{\frac{1}{5} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3}}.$$

Exercice 18. Quel nombre faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{5}{8}$ pour que la nouvelle fraction soit égale à 4 ?

Exercice 19. Trouvez le nombre caché à la place de ♠ et ♣.

$$\frac{87}{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{\spadesuit} \quad \text{et} \quad \frac{31}{17 + \frac{101}{8 - \frac{7}{\clubsuit}}}.$$

4. Puissances.

I Formules.

Les formules à connaître : $a^n \times a^p = a^{n+p}$, $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$, $(a^n)^p = a^{n \times p}$.

De plus les puissances sont prioritaires sur les multiplications et les divisions en ligne.

Les parenthèses restent le plus prioritaire.

Exemples.

1) La puissance est prioritaire : $2 \times 3^3 = 2 \times 27 = 54$.

2) Utilisation des formules : $\frac{2^3 \times 2^{-5}}{2^7} = 2^{3-5} \times 2^{-7} = 2^{-2-7} = 2^{-9} = \frac{1}{2^9}$.

3) remarquons que $\frac{13}{2^{-9}} = 13 \times 2^9$.

Exercice 20. Écrivez les nombres sous la forme 3^n avec n un entier relatif.

$$\begin{aligned} A &= \frac{3^5 \times 3^2}{3^{-7}}, & B &= (3^2 \times 3^3)^4, & C &= 3^2 \times (3^3)^4, \\ D &= \frac{((-3)^2 \times 3^2)^3}{(-3)^5}, & E &= \frac{((-3)^2)^3}{(-3)^3 \times (-3)}, & F &= \frac{3^{-2} \times 9^{-8}}{3^4 \times 27^{-17}}, \\ G &= \left(\frac{1}{3^5} \times (3^2)^3 \right)^2, & H &= \frac{3^2 \times 27}{81^2}. \end{aligned}$$

Exercice 21. Écrivez les nombres sous la forme a^n avec a un entier naturel et n un entier relatif.

$$\begin{aligned} A &= 2^4 \times 4^{-5}, & B &= 2^5 \times 8^{-3}, & C &= \frac{8^3}{4^3}, \\ D &= 0,25^{-6} \times 4^{-25}, & E &= 5^4 \times 25^{-7} \times 125^2, & F &= \frac{7^6 \times (-49)^5}{7^{-9}}. \end{aligned}$$

Exercice 22. Écrivez les nombres sous la forme $2^n \times 5^m$ avec n et m des entiers relatifs.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^4}{(2^2 \times 5)^5}, & B &= \frac{2 \times (5^2)^3}{2^{-3}}, & C &= \frac{(2^3 \times 2^{-4})^2}{(5^3)^2 \times 5^{-5}}, \\ D &= \frac{(10^2)^3}{2^{-4} \times 25^6}, & E &= \left(\frac{2}{5} \right)^4 \times \left(\frac{5^2}{2} \right)^3, & F &= \frac{64^3 \times 125^4}{250^7}. \end{aligned}$$

Exercice 23. Soient a et b des nombres non nuls. Écrire les expressions sous la forme $a^n \times b^m$ avec n et m entiers relatifs.

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2 b^{-3}}{a^{-2} b}, & B &= \frac{a^6 b^{-4}}{a^{10} b^{-8}}, & C &= \frac{(a^2 b)^3}{b a^{-2}}, \\ D &= a^2 (ab)^{-3} (b^{-2})^{-3}, & E &= \frac{(ab^2)^{-1}}{a^{-2} b^{-7}}, & F &= (a^3 b)^3 (a^2 b^5)^5, \\ G &= \frac{(ab^3)^{-4} (a^{-2} b)^2}{a^{-6} b^4}. \end{aligned}$$

II Exercices.

Exercice 24. Déterminez le nombre de chiffres de $4^{16} \times 5^{25}$.

Exercice 25. Déterminez la somme des chiffres du nombre $10^{2046} - 2046$.

Exercice 26. En ajoutant 4^{15} et 8^{10} on obtient une puissance de 2. Laquelle ?

Exercice 27. Dans chacun des cas, déterminer l'entier naturel n .

a) $2^4 \times 3^2 \times 5^6 \times 7^2 = n^2$,

b) $2^3 \times 3^6 \times 5^3 \times 7^3 = n^3$,

c) $\left(\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \right) \left(\frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} \right) = 2^n$,

d) $3^{2001} + 3^{2002} + 3^{2003} = n \times 3^{2001}$,

e) $8^n = 2^n \times 2^{12}$.

5. Formules algébriques.

Exercice 28. Exprimez les calculs effectués par les programmes suivants avec une formule de calcul en fonction de x .

a) Programme 1.

- Prendre un nombre x .
- Ajouter 1 au résultat.
- Triplet le résultat.
- Diviser le résultat par 5.

b) Programme 2.

- Prendre un nombre x .
- Enlever 2.
- Élever le résultat au cube.
- Ajouter 3 au résultat.

c) Programme 3.

- Prendre un nombre x .
- Le tripler.
- Enlever 5 au résultat.
- Élever au carré le résultat.
- Ajouter 1 au résultat.
- Inverser ce résultat.

d) Programme 4.

- Prendre un nombre x .
- L'inverser.
- Ajouter 2 au résultat.
- Prendre l'opposé de ce résultat.

Exercice 29. Donnez sous une forme simplifiée les opposés de :

- a) $3 - 2x$ b) x^2 c) $\frac{x-1}{2}$ d) $(x-1)(2-x)$ e) $-\frac{2}{x}$

Exercice 30. Donnez sous une forme simplifiée les inverses de :

- a) $\frac{x}{5}$ b) $x^2 + 1$ c) $\frac{5}{2} + \frac{3}{7}$ d) $\frac{x}{2} + 1$ e) $-\sqrt{2}$

Exercice 31. Dites si chacune des phrases est vraie pour tous a et b non nuls.

- a) L'opposé de la somme de a et de b est la somme des opposés de a et b .
b) L'opposé du produit de a et de b est le produit des opposés de a et b .
c) L'inverse de la somme de a et de b est la somme des inverses de a et b .
d) L'inverse du produit de a et de b est le produit des inverses de a et b .

6. Développer et factoriser.

I Écriture réduite et ordonnée.

On ne réduit qu'une expression déjà développée. Réduire signifie deux choses à faire dans cet ordre : simplifier les multiplications (remplacer $x \times 3x$ par $3x^2$) puis en regroupant et en additionnant les termes de même nature, de même puissance de x (remplacer $3x - 7x^2 + 2x$ par $5x - 7x^2$).

Exercice 32. Réduisez.

a) $2x + 3x$

b) $2x \times 3x$

c) $2x^2 + 3x^2$

d) $2x^2 \times 3x^2$.

Exercice 33. Réduisez.

a) $3 \times x^2 + 9 \times x - x \times 5 - 2 \times x^2 - 4$

b) $x^2 - 6 + 2 \times x - x \times 4 + 3x^2 + x - 5$

II Les règles de développement du collège.

Vous devez déjà avoir automatisé ces techniques. Nous nous entraînons avec des puissances de x (polynôme) mais vous aurez à le faire dans de nombreuses situations.

- $a(b + c) = ab + ac$ (distributivité),
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ (double distributivité),
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (identité remarquable),
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (identité remarquable),
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (identité remarquable).

Exemples.

1) $3x(4 - 5x) = 3x \times 4 + 3x \times (-5x) = 12x - 15x^2 = -15x^2 + 12x$.

2) $2 - (x^2 + x - 1) = 2 - x^2 - x + 1 = -x^2 - x + 3$.

3) $(2x - 3)(-x + 4) = 2x \times (-x) + 2x \times 4 + (-3) \times (-x) + (-3) \times 4 = -2x^2 + 8x + 3x - 12 = -2x^2 + 11x - 12$.

4) $(a^2b + a)(ab^2 + a) = a^2b \times ab^2 + a^2b \times a + a \times ab^2 + a \times a = a^3b^3 + a^3b + a^2b^2 + a^2$.

1 Distributivité simple.

Exercice 34. Développez, ordonnez et réduisez.

$$A = a \times (a + 3),$$

$$B = (x^2 + 4) \times x,$$

$$C = a \times (a^2 + a),$$

$$D = a \times (a^2 + 1),$$

$$E = a \times (3a + 6),$$

$$F = b \times (3b^2 + 5b),$$

$$G = (7b^2 - 6b) \times b,$$

$$H = x \times (5x^2 + 2x),$$

$$I = (a^2 + 2a) \times a.$$

Exercice 35. Développez, ordonnez et réduisez.

$$A = x^2(2x + x^2), \quad B = (2x^2 - 5) \times 3x^2, \quad C = 7a^3 \times (3a^2 + 2a), \quad D = 3x \times (5x^2 - 3x).$$

Exercice 36. Développez, ordonnez et réduisez.

$$\begin{aligned} A &= 2xy(x^2y + x), & B &= (2ab - 4ab^2)3a^2b, & C &= 5y^2(y^3 - 2x^2y + 1), \\ D &= (3a^3 - 2a^2b - 1)4ab, & E &= 2x^3(3xy + x), & F &= (2a^2b - 3b)ab. \end{aligned}$$

2 Double distributivité.

Exercice 37. Développez, ordonnez et réduisez.

$$\begin{aligned} A &= (3t - 2)(7t - 4), & B &= (4s - 1)(2s + 5), & C &= (3x + 5)(2x1), \\ D &= (7y - 3)(2y - 1), & E &= (x + 3y)(2x - y), & F &= (4x - 5y)(x - y). \end{aligned}$$

Exercice 38. Développez, ordonnez et réduisez.

$$\begin{aligned} A &= (3x^2 - 5)(2x^2 + 1), & B &= (a^2b + 3a)(2a^2b - a), & C &= (5ab - 2b)(ab - 4b), \\ D &= (3y^2 - 5x)(3x + 5y^2), & E &= (2x^2 - 3x)(-4x + 5x^2), & F &= (-2x^2 - 5y)(-x - 4y^2). \end{aligned}$$

Exercice 39. Développez, ordonnez et réduisez.

$$\begin{aligned} A &= (2a^3 - 7b)(-7a + 3b^2), & B &= (5abc - 2ab)(12ab - 15abc), \\ C &= (5ab^2 + 3a^2b)(-4a^2b + 3ab^2), & D &= (2a^3b - 7ab^3)(-a^3b + 2ab^3). \end{aligned}$$

3 Identités remarquables.

Exercice 40. Développez, ordonnez et réduisez.

$$\begin{aligned} A &= (7x - 2y)^2, & B &= (4a - 2b)^2, & C &= (3a + 2b)^2, \\ D &= (7x - 12y)^2, & E &= (2b - 7c)^2, & F &= (x - 7y)(x + 7y). \end{aligned}$$

Exercice 41. Développez, ordonnez et réduisez.

$$\begin{aligned} A &= (3a - 2b)^2, & B &= (2 - 2b)^2, & C &= (6a + b)^2, \\ D &= (3x - z)(3x + z), & E &= (4a - 7)^2, & F &= (10a - 7b)^2. \end{aligned}$$

Exercice 42. Développez, ordonnez et réduisez.

$$\begin{aligned} A &= (2a - b^2)^2, & B &= (2a^2 + b)^2, & C &= (3x^2 - y)(3x^2 + y), \\ D &= (3a^2 - 2b^3)^2, & E &= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3), & F &= \left(3x^2 - \frac{1}{3}x\right)^2. \end{aligned}$$

4 Facteur commun.

Exercice 43. Factorisez en utilisant un facteur commun.

$$\begin{aligned} A &= (x + 1)(x - 3), & B &= -4(2x + 1) - (5x - 3)(2x + 1), \\ C &= (6 - 7x)(x - 2) - (x + 1)(6 - 7x). \end{aligned}$$

Exercice 44. Factorisez en utilisant un facteur commun.

$$\begin{aligned} A &= 3(x - 2) + (x + 3)(x - 2), & B &= 5x(x - 3) - x(x + 1), \\ C &= (x + 5)^2 + (x - 5)(x + 5) - 3(x + 5), & D &= 5(2x - 1)^3 + (2x - 1)^2(x + 2), \\ E &= x^2(x - 2) + 3x^3, & F &= (x - 3)^2 - 2x(x - 3) + (x - 3), \\ G &= (2x - 3)^2 + 5x(3 - 2x), & H &= (2x + 5) - (x + 3)(4x + 10), \\ I &= (x + 9)(x - 5) + 2(6x - 30). \end{aligned}$$

5 Factoriser avec les identités remarquables.

Exercice 45. Factorisez en utilisant une identité remarquable.

$$A = x^2 + 10x + 25,$$

$$B = 16 - 25x^2,$$

$$C = 1 - 12x + 36x^2,$$

$$D = (x + 7)^2 - 1,$$

$$E = 16x^2 - 8x + 1,$$

$$F = 64 - (2x + 3)^2,$$

$$G = (3x - 1)^2 - 9,$$

$$H = 4x^2 - 20x + 25.$$

Exercice 46. Factorisez en utilisant une identité remarquable.

$$A = 4x^2 - (x - 5)^2,$$

$$B = \frac{1}{4}x^2 + x + 1,$$

$$C = 81 + 4x^2 + 36x,$$

$$D = 9(x + 1)^2 - 36,$$

$$E = (2x + 3)^2 - (x - 1)^2,$$

$$F = \frac{4}{9} - \left(2x + \frac{1}{3}\right)^2.$$

Exercice 47. Factorisez en utilisant une identité remarquable.

$$A = x^2 - 9 + (x - 3)(2x + 5),$$

$$B = 5x(4x - 1) + 16x^2 - 1,$$

$$C = x^2 - 25x + x - 5,$$

$$D = 4x^2 + 4x + 1 - (2x + 1)(3 - 5x).$$

6 Factoriser par regroupements de termes.

Exercice 48. Factorisez le plus possible.

$$A = ax + ay + bx + by,$$

$$B = ab + ac + bd + dc,$$

$$C = ad + ac - bd - bc,$$

$$D = 21xy - 3x - 28y + 4,$$

$$E = ac + 3ad - 2bc - 6bd,$$

$$F = 5ax - 5ay - bx + by.$$

Exercice 49. Factorisez le plus possible.

$$A = x^3 + 4x^2 + x + 4,$$

$$B = 3x^3 - x^2 + 6x - 2,$$

$$C = 5x^3 + x^2 + 5x + 1,$$

$$D = 18x^3 + 9x^2 + 2x + 1,$$

$$E = x^3 + x^2 + x + 1,$$

$$F = x^5 + x^4 + x + 1.$$

III Exercices.

Exercice 50. Développez astucieusement puis simplifiez. $A = (x + a)(x - a)(x^2 - a^2)$,
 $B = (2a - 1)(2a + 1)(4a^2 + 1)$, $C = (x - 1)(x^2 + 1)(x + 1)$, $D = (x + 2)(x - 2)(x^4 + 16)(x^2 + 4)$,
 $E = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 - 8)$, $F = (4a^2 + 3)(2a^2 + 1)(2a^2 - 1)$.

Exercice 51. Développez astucieusement puis simplifiez. $A = ((x - 1) + x^2)((x - 1) - x^2)$,
 $B = (x + (2 + x^2))(x - (2 + x^2))$, $C = (x + y - 1)(x - y + 1)$, $D = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.

Exercice 52. Soient x , y et z trois nombres réels non nuls. On pose : $a = \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$, $b = \frac{z}{x} + \frac{x}{z}$
 et $c = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Calculez $a^2 + b^2 + c^2 - abc$.

Exercice 53. Sachant $X + Y = 1$ et $X^2 + Y^2 = 2$, déterminez

a) XY ,

b) $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$,

c) $X^3 + Y^3$,

d) $X^4 + Y^4$.

Exercice 54. Un entier naturel non nul est écrit sur chacune des faces d'un cube, et sur chaque sommet on écrit le produit des nombres inscrits sur les trois faces adjacentes à ce sommet. La somme des nombres placés aux sommets du cube est 105. Quelle est la somme des nombres placés sur les faces du cube ?

Exercice 55. Décomposez en produit de facteurs premiers $A = 24999999$ et $B = 1018081$.

7. Équations.

I Équations du premier de degré.

Exercice 56. Résolvez les équations.

- 1) $1 - 2x + 3 - 5x = -x - 1 + 2 - 4x$, 2) $-5x + 1 - x + 3 - 4x + 1 = 0$,
3) $(2x + 1) - 3(5x + 1) = 2(x - 4) - (3x - 6)$, 4) $3x - 4(x + 2) = x + 3 - (7 - 6x)$,
5) $7 - (2x - 3) + x = x - 1 - 3(2x + 1)$ 6) $4 - (-2x - (5 + 4x)) = 5x - (3 - 2(4x - 1))$.

Exercice 57. Résolvez les équations.

- 1) $\frac{x-3}{4} = x + 3$, 2) $\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{3}x - 1$, 3) $\frac{2x-1}{3} = \frac{-5-x}{4}$,
4) $\frac{2x-3}{4} = \frac{3x-1}{2}$, 5) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{x}{6}$ 6) $\frac{3}{8}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$,
7) $\frac{x}{2} - 1 = \frac{7x-4}{8}$ 8) $\frac{5}{6}x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$.

II Équations $x^2 = a$.

Exercice 58. Résolvez les équations.

- 1) $x^2 + 5 = 0$, 2) $2x^2 - 18 = 0$, 3) $x^2 - 1 = 2x^2 - 3$, 4) $3x^2 - 7 = x^2 - 7$.

Exercice 59. Résolvez les équations.

- 1) $(x - 3)^2 = 49$, 2) $(x - 4)(x + 4) = 9$, 3) $(2x + 7)^2 = 25$.

III Exercices.

Exercice 60. Chaque question est un problème de géométrie à part entière.

- 1) L'aire d'un trapèze est de $85,5 \text{ cm}^2$. Sa hauteur est de 4,5 cm. Une de ses bases mesure 15 cm. Calculer la longueur de l'autre base.
- 2) Le périmètre d'un rectangle mesure 240 m. Sa longueur mesure 26 m de plus que sa largeur. Calculer ses dimensions.
- 3) Combien mesure le côté d'un triangle équilatéral dont une hauteur mesure 6 cm ?
- 4) Un rectangle a 15 m de largeur. Si on diminuait sa longueur de 14 m et si on augmentait sa largeur de 6 m, l'aire ne varierait pas. Calculer la longueur de ce rectangle.
- 5) Dans un losange, la grande diagonale mesure 7 cm de plus que la petite. Si on diminuait la longueur de la grande diagonale de 9 cm et si on augmentait la longueur de la petite diagonale de 5 cm, l'aire diminuerait de 82 cm^2 . Calculer la longueur de chaque diagonale.

Exercice 61. Chaque question est un problème à part entière.

- 1) L'âge d'un père est le quadruple de celui de son fils. Quel est l'âge du père, sachant que, dans 20 ans, il ne sera plus que le double de celui de son fils ?
- 2) Bob a le double de l'âge de Joe. Il y a 10 ans, Bob avait quatre fois l'âge de Joe. Quels sont les âges de Bob et de Joe ?
- 3) Il y a 55 ans, l'âge d'un père dépassait de 25 ans l'âge de son fils. Dans 14 ans, l'âge du fils sera égal aux trois quarts de l'âge de son père. Quels sont les âges du père et du fils ?

Exercice 62. Soit l'expression : $A = 9x^2 - 49 + (3x + 7)(2x + 3)$.

- 1) Développez l'expression A .
- 2) Factorisez $9x^2 - 49$, puis l'expression A .
- 3) Résolvez l'équation $A = 0$.

Exercice 63. On considère l'expression $E = (3x + 2)^2 - (x - 1)^2$.

- 1) Développez et réduisez E .
- 2) Factorisez E .
- 3) Résolvez l'équation $E = 0$.

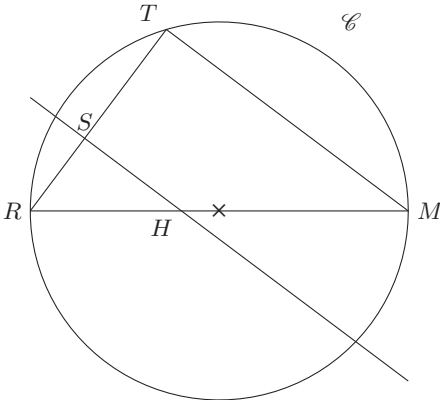
8. Fonctions.

Exercice 64. Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre ;
- ajouter 1 à ce nombre ;
- calculer le carré du résultat ;
- soustraire le carré du nombre de départ au résultat précédent ;
- écrire le résultat.

- 1) On choisit 4 comme nombre de départ. Quel est le résultat obtenu ?
- 2) On note x le nombre choisi. Exprimer le résultat du programme en fonction de x .
- 3) Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto 2x + 1$.
 - a) Calculez l'image de 0 par f .
 - b) Déterminez l'antécédent de 5 par f .

Exercice 65. L'unité de longueur est le centimètre.



Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $RM = 10$. Soit T un point de $\mathcal{C}$ tel que $RT = 6$. Soit S un point de $[RT]$ et H un point de $[RM]$ tel que $(SH) \perp (TM)$. On pose $RS = x$.

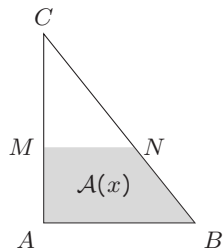
- 1) Démontrer que $RM T$ est un triangle rectangle.
- 2) Démontrer que $TM = 8$.
- 3) Déterminer, en fonction de x , RH et SH .
- 4) Exprimer, en fonction de x , le périmètre du triangle RSH .

- 5) Exprimer, en fonction de x , le périmètre du trapèze $STMH$.
- 6) On considère les fonctions affines f et g telles que : $f : x \mapsto 4x$ et $g : x \mapsto 24 - \frac{4}{3}x$.
 - (a) Calculez $f(0)$, $f(6)$, $g(0)$ et $g(6)$.
 - (b) Déterminez par le calcul la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$.

Exercice 66. L'unité de longueur est le mètre.

Partie A.

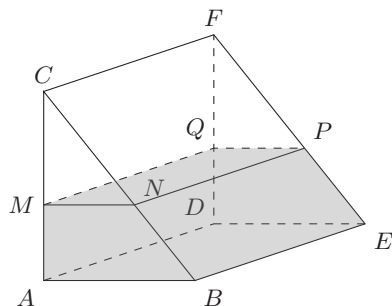
Soit un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 5$.



Soit M un point du segment $[AC]$. On pose $AM = x$. La parallèle à la droite (AB) passant par M coupe le segment $[BC]$ en N .

- 1)
 - (a) Entre quelles valeurs peut varier x ? Quelle est, en fonction de x , la longueur CM ?
 - (b) Démontrez que $MN = 4 - 0,8x$.
- 2) Calculez, en fonction de x , l'aire $A(x)$ du trapèze $ABNM$.

Partie B.



Le schéma ci-dessus représente une citerne posée sur un sol horizontal. Elle a la forme d'un prisme droit $ABCDEF$:

- sa base ABC est le triangle décrit dans la première partie ;
 - $BE = 10$.
- 1) Quel est, en mètres cubes, le volume de la citerne ?
 - 2) La citerne contient de l'eau jusqu'au niveau du plan $MNPQ$, comme l'indique le schéma. x désignant la longueur AM , démontrer que le volume d'eau $\mathcal{V}(x)$ est égal à $4x(10 - x)$.
 - 3) Calculez le volume d'eau contenue dans la citerne lorsqu'elle est remplie à mi-hauteur.
 - 4)
 - (a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant avec une calculatrice :

x	1	1,4	1,5	1,6	2
$\mathcal{V}(x) = 4x(10 - x)$					

- (b) Déduisez-en un encadrement à 0,1 près de la hauteur d'eau lorsque la citerne est remplie à la moitié de sa capacité.